ALGÈBRE

Matrices & Opérations sur les matrices.

A_{mn} = (matrice à m lignes et n colonnes).

$$A_{33} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

nombre de lignes de la 1ère
=
nombre de lignes de la 2ème

I- Addition de deux matrices:

$$\begin{matrix} A_{nm} \\ B_{n'm'} \end{matrix} \Rightarrow A_{nm} + B_{n'm'} \begin{cases} a_{n_1} + B_{n'_1} ; \dots \\ a_j + b_j \\ a_{n_1} + B_{n'_1} ; \dots \end{cases}$$

* Exemple:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

II- Multiplication de deux matrices:

$$B_{np} \begin{pmatrix} B_{1p} & \dots & B_{np} \\ B_{n_1} & \dots & B_{np} \end{pmatrix}$$

nombre de colonnes
=
nombre de lignes

* Exemple: AB ; AD ; DA ; BC ; AC ; CA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad DA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

AC = (impossible)

$$CA = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 17 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

* Déterminant d'une matrice :

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ matrice carré

* 1ère méthode : Méthode de Sarius.

* Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = -[(6\times2\times1) + (2\times-1\times3) + (-1\times5\times-1)]$
$+[(-3\times2\times-1) + (-1\times-1\times6) + (1\times5\times2)]$
$= -23 + 22$

$\det A = -1$

* 2ème méthode : Méthode des mineurs.

det A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{33})$$
$$+ a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$

* Exemple :

Soit $A \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez det A.

□ det A par la méthode de Sarius :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$= (-3\times2\times3) + (-1\times0\times6) + (2\times5\times2)$
$-[(6\times2\times2) + (2\times0\times-3)\times(3\times5\times-1)]$
$= 2 - 9 = -7$

□ det A par la méthode des mineurs:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \times (-3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 6 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)(6) + (-5)(-7) + 6(-4)$$

$$= -7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Com}\,A$$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Com}\,A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

* Exemples

$$B \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$. Calculez Com B

$$\mathrm{Com}\,B = \begin{bmatrix} (-1)^{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & (-1)^{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & (-1)^{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^{3}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & (-1)^{4}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & (-1)^{5}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^{4}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^{5}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^{6}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Com}\,B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -4 \\ -15 & -21 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

det A ? Com A ? t Com A ? det B ? Com B ? t Com B ?

* $\det A = (-1)^2 \times 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \times 0 \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \times 1 \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= 6 - 0 - 5 = 1$

$$\text{Com } A = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ (-1)^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ (-1)^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^6 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{Com } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\text{Com } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \times A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

* $\det B = (-1)^2 \times 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \times 0 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \times 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$= -1 + 0 + 2 = 1$

$$\text{Com } B = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ (-1)^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ (-1)^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (-1)^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Com } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{Com } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot {}^t\text{Com } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B \times B^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

* Calculez : (Exercice III)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_3 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculez le det A par la méthode de Sarrus et par la méthode des mineurs par rapport à la 1ère ligne.
- Calculez la Comatrice A et sa transposée (tComA) ; écrire A^{-1}.
- Déduire x, y, z solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} -3x + 5y + 6z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ x - y - z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x + 5y + 6z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

⇒ det A par la méthode de Sarrus :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-3 \times 2 \times -1) + (-1 \times -1 \times 6) + (1 \times 5 \times 2) - [(6 \times 2 \times 1) + (2 \times -1 \times -3) + (-1 \times 5 \times -1)]$$
$$= 22 - 23 = -1$$

⇒ det A par la méthode des mineurs:

$$\det A = (-1)^2 \times (-3) \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^3 \times 5 \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^4 \times 6 \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 5 - 6 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Com } A = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ (-1)^3 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ (-1)^4 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & (-1)^6 \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{com } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\text{Com } A = -{}^t\text{Com } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times A^{-1}) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = -4 \end{cases}$$

* Exercice 2:

Soit la matrice A $\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x + ay + az = 1 \\ x - y = 1 \\ -x - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + ay + az = 0 \\ x - y = 2 \\ -x - z = 1 \end{cases}$$

▫ Calculez A^{-1} ; montrez que pour tout réel A est inversible ($\det \neq 0 \Rightarrow A$ inversible).

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\text{Com}A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = (-1 \times -1 \times -1) + (1 \times 0 \times a) + (-1 \times a \times 0)$
$- [(a \times -1 \times -1) + (0 \times 0 \times -1) + (-1 \times a \times 1)]$
$= -1 - (a + 0 - a) = -1 - a + a = -1$

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^3 \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^4 \begin{pmatrix} -1 & a \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} -1 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^4 \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^5 \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^6 \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} 1\,(1-0) & -1\,(-1-0) & 1\,(0-1) \\ -1\,(-a-0) & 1\,(1+a) & -1\,(0+a) \\ 1\,(0+a) & -1\,(0-a) & 1\,(1-a) \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & a+1 & -a \\ a & a & 1-a \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{Com}A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+1 & a \\ -1 & -a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$-1 \times {}^t\text{Com}A = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -a-1 & -a \\ 1 & -a & a-1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$(A \times A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

puisque det $A \geqslant 0$ et ne montre pas le signe a, alors a est inversible.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & a-1 & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1-2a \\ -2-2a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -1-2a \\ y = -2-2a \\ z = 2a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -a-1 & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3a \\ -2-3a \\ 3a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -3a \\ y = -2-3a \\ z = 3a-1 \end{cases}$$

* On considère le système : $\begin{cases} ax + by = c & L_1 \\ a'x + b'y = c' & L_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \qquad \det A = ab' - a'b$$

- solution unique si $\det A \neq 0$
- Si $\det A = 0$
  - Si L_1 et L_2 sont équivalents ⇒ infinité de solutions.
  - Si L_1 et L_2 ne sont pas équivalents ⇒ pas de solution.

* Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ 3x + 9y = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = (2 \times 9) - (6 \times 3) = 18 - 18 = 0$$

$$\begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ 3x + 9y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 18y = 3 \\ 6x + 18y = 6 \end{cases}$$

Il n'y a pas d'équivalence, donc pas de solution.

* Résoudre :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 8 + 3 = 11$$

$$\begin{matrix} 2L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 8x - 2y = 42 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2L_1 + L_2 \Rightarrow 11x = 55 \\ x = 55/11 = 5 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3 \times (4x - y) = 3 \times 21 \\ 4 \times (3x + 2y) = 4 \times 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 63 \\ 12x + 8y = 52 \end{cases}$$

$L_1 + L_2 \Rightarrow -11y = 11 \Rightarrow y = -1$

$$S = \{5 ; -1\}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

Pivot de GAUS.

Passer à une forme :

~~x + 2y - z = 8~~
~~-x + 3y + 4z = -7~~
~~2x - y~~

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 & L_1 \\ 5y + 3z = 1 & L_2 = L_1 + L_2 \\ 5y - 4z = 22 & L_3 = 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & 5 & 3 \\ & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 & L_1 \\ 5y + 3z = 1 & L_2 \\ 7z = -21 & L_3 = L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 - 2y + z = 8 - 4 - 3 = 1 \\ 5y = 1 - 3z \Rightarrow y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$S = \{1 ; 2 ; -3\}$$

* Système à solution unique :

À résoudre par la méthode Pivot de GAUS.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 & L_1 \\ 2x - y + 2z = 11 & L_2 \\ 3x + 4y - 2z = -14 & L_3 \end{cases}$$

⇒ Solution :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 & L_1 = L_1/2 \\ 5y + 4z = 7 & L_2 = L_1 - L_2 \\ -4y - 22z = -62 & L_3 = 2L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 & L_1 \\ 5y + 4z = 7 & L_2 \\ -94z = 282 & L_3 = 5L_3 + 4L_2 \end{cases}$$

$z = \frac{-282}{-94} = \boxed{3}$ $\quad y = \frac{7 - 4z}{5} = \frac{7 - 4\times 3}{5} = \boxed{-1}$

$x = 9 - 2y - 3z = 9 - 2(-1) - 3(3) = \boxed{2}$

L'ensemble des solutions est $S = \{2 ; -1 ; 3\}$

On a une solution unique.

* Système indéterminé :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & L_1 \\ x - 2y + z = 1 & L_2 \\ 2x - y - z = 4 & L_3 \end{cases}$$

⇒ Solution :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & L_1 \\ -3y + 3z = -2 & L_2 = L_2 - L_1 \\ -3y + 3z = -2 & L_3 = L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -3y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$y = \frac{-2 - 3z}{-3} = \boxed{\frac{2}{3} + z}$$

$$x = 3 + 2z - z - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{7}{3} + z}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{3} + z ; \frac{2}{3} + z ; z \right\}$$

On a une infinité de solutions.

Deux variables déterminées et une variable indéterminée.

Donc, on a un système indéterminé.

* Système impossible :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & L_1 \\ 2x - y - 2z = -2 & L_2 \\ 3x + 0y - z = 10 & L_3 \end{cases}$$

⇒ Solution :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & L_1 \\ -3y - 4z = -14 & L_2 = L_2 - 2L_1 \\ -3y - 4z = -8 & L_3 = L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & L_1 \\ -3y - 4z = -14 & L_2 \\ 0 = 6 & L_3 = L_3 - L_2 \end{cases}$$

L_3 est une équation impossible.
Donc, le système est impossible.

$$* \begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z = a \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z = b \\ a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z = c \end{cases}$$

$AX = B$

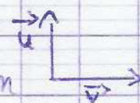
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{matrix} a & a_{12} & a_{13} \\ b & a_{22} & a_{23} \\ c & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}{\det A} \qquad y = \frac{\begin{matrix} a_{11} & a & a_{13} \\ a_{21} & b & a_{23} \\ a_{31} & c & a_{33} \end{matrix}}{\det A} \qquad z = \frac{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ a_{31} & a_{32} & c \end{matrix}}{\det A}$$

- * Produit scalaire
- * Norme
- * Distance
- * Projection orthogonale
- * Équation de la droite
- * Équation du plan dans l'espace.

* Produit scalaire :

On déplace dans une base orthogonale au plan



Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par $\vec{u}.\vec{v} = x x' + y y'$

*** Exemple :** ~~$\vec{u}.\vec{v} = x^2 + y^2$~~

~~$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2}$~~

~~$\|u\|^2 = x^2 + y^2$~~

$\vec{u} = (1, 2) \qquad \vec{v} = (2, 3)$

$\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$

$\vec{u}.\vec{v} = (1\ 2)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2 + 2 \times 3 = 8$

▫ Autres expressions du produit scalaire.

① $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2} \|\vec{u} + \vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

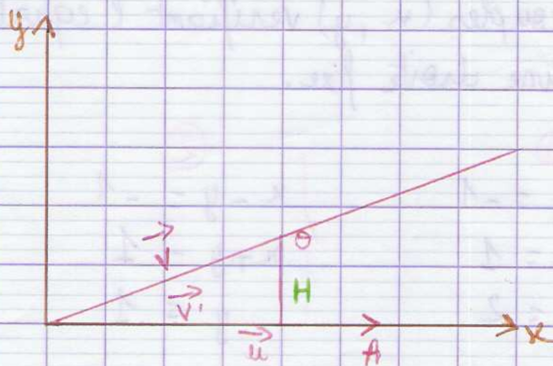
*** Exemple :** $\vec{u}.\vec{v} = x^2 + y^2$

$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\|u\|^2 = x^2 + y^2$

② Si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$: $\vec{u}.\vec{v} = \|u\|.\|v\|.\cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$

③ $\vec{u} \neq 0$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$ avec $\vec{v}'$ projet orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction du vecteur $\vec{u}$



$\vec{u}.\vec{v} = \vec{\theta A} \times \vec{\theta B} = 0$

$= \vec{\theta A} \times \vec{\theta H}$

$\theta A = \theta B \cos(\widehat{\theta A . \theta B})$

Le produit scalaire de deux vecteurs ⊥ est nul.

*** Norme :**

$u = (x, y)$ — deux points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$\vec{u}(x, y, z)$ $\qquad$ $A(x_A, y_A, z_A)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\qquad$ $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$\vec{u}_1 = (1, 2)$ $\qquad$ $\vec{u}_2 = (-3, 0)$ $\qquad$ $\vec{u}_3 = (-2, 1)$

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = 1 \times (-3) + 2 \times 0 = -3$

$\vec{u}_1 \times \vec{u}_3 = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$

$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = (-3)(-2) + 0 \times 1 = 6$

* Équation de droite dans un plan

Une équation linéaire à deux inconnus du type $a_1x + a_2y = b$ est l'équation d'une droite dans le plan.

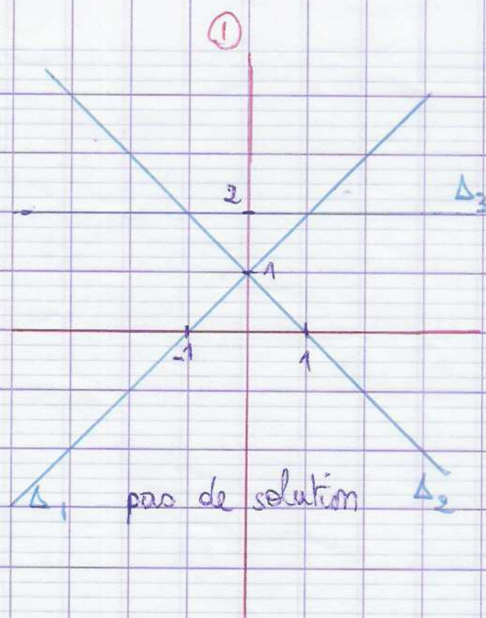
Si a_1 et a_2 sont fixés, avec $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, l'ensemble des couples (x, y) vérifiant l'équation $a_1x + a_2y = b$ est une droite fixe.

① $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\qquad$ ② $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\qquad$ ③ $\begin{cases} x - y = -1 & L_1 \\ 2x - 2y = -2 & L_2 \\ -x + y = 1 & L_3 \end{cases}$

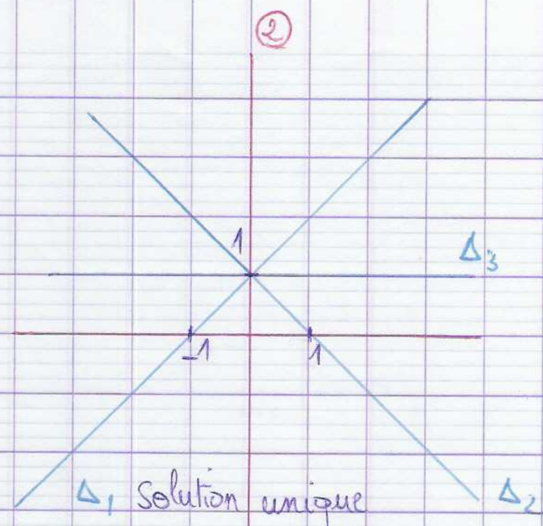
$$\begin{cases} x - y = -1 & L_1 = L_1 \\ x - y = -1 & L_2 = L_2/2 \\ x - y = -1 & L_3 = (-1)L_3 \end{cases}$$

* Résoudre les systèmes linéaires:

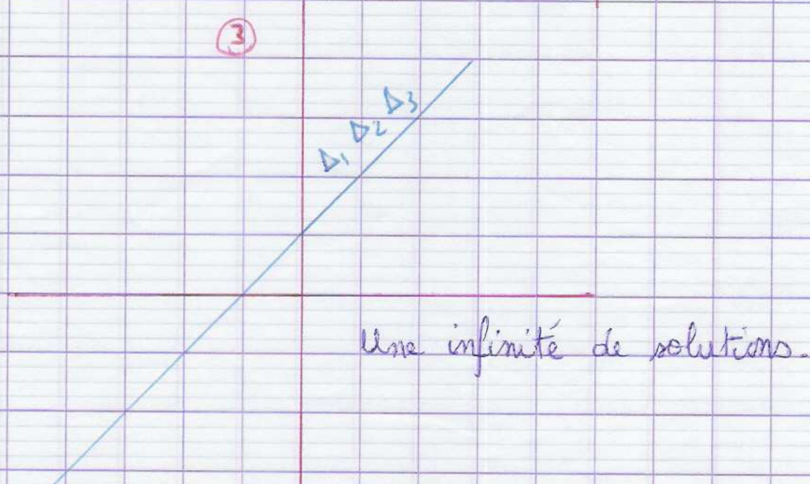




pas de solution



Solution unique



Une infinité de solutions.

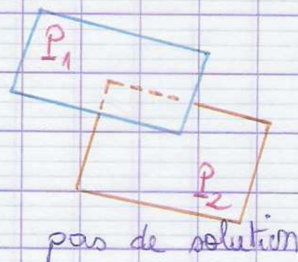
* Équation de plan dans l'espace:

Une équation linéaire à trois inconnus x, y, z est l'équation d'un plan dans l'espace

$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$





pas de solution

